

նման հաջորդական թվարկման մեթոդի իրականացումը գործնականորեն անհնար է, երբ դիտարկվող ֆունկցիայի արգումենտների թիվը բավականաչափ մեծ է: Այդ պատճառով գործնականում օգտվում են խնդրի լուծման հատուկ մեթոդներից, որոնցով կարելի է ավելի արագ հասցնել նպատակին: Նման մեթոդներ առավել լավ են ուսումնասիրված, երբ  $F = \{x_1 x_2, x_1 \vee x_2, \bar{x}\}$ :

Խնդրի բարդության պատճառով մենք կգրադվենք առավել մասնավոր խնդրով, այն է՝ տվյալ բուլյան ֆունկցիան իրականացնող այն բանաձևի կառուցումով, որը նվազագույն թվով տառեր պարունակող դիզյունկտիվ նորմալ ձև է:

Սահմանում 1.12:  $K = x_i^{\sigma_i} \dots x_{i_r}^{\sigma_{i_r}}$  բանաձևը կոչվում է տարրական կոնյունկցիա:  $r = 0$  դեպքում ընդունվում է  $K = 1$ :

Սահմանում 1.13: Տարրական կոնյունկցիաների  $D = K_1 \vee \dots \vee K_m$  դիզյունկցիան կոչվում է դիզյունկտիվ նորմալ ձև:  $m = 0$  դեպքում ընդունվում է  $D = 0$ :

Սահմանում 1.14:  $g = g(x_1, \dots, x_n)$  ֆունկցիան կոչվում է  $f = f(x_1, \dots, x_n)$  ֆունկցիայի իմպլիկանտը, եթե  $g \rightarrow f = 1$ :  $f$  ֆունկցիայի պարզ իմպլիկանտ է կոչվում ցանկացած  $g = x_i^{\sigma_i} \dots x_{i_k}^{\sigma_{i_k}}$  տարրական կոնյունկցիա, որը  $f$ -ի իմպլիկանտ է, բայց նրանից որևէ  $x_{i_m}^{\sigma_{i_m}}$  ( $1 \leq m \leq k$ ) հեռացնելիս այն կդադարի  $f$ -ի իմպլիկանտ լինելուց:

Թեորեմ 1.7: Եթե  $g_1, \dots, g_m$  -երը  $f$  ֆունկցիայի իմպլիկանտներ են, ապա  $g_1 \vee g_2 \vee \dots \vee g_m$ -ը նույնպես  $f$ -ի իմպլիկանտ է:

Ապացույց: Թեորեմն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ կամայական  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  հավաքի համար  $g_1 \vee g_2 \vee \dots \vee g_m$ -ը 1 արժեք ընդունելուց հետևում է, որ  $f$ -ը նույնպես 1 արժեք է

ընդունում այդ նույն հավաքի դեպքում: Իրոք,  $g_1 \vee g_2 \vee \dots \vee g_m$ -ը 1 արժեք է ընդունում միայն այն դեպքում, երբ որևէ  $g_i (1 \leq i \leq m)$  1 արժեք է ընդունում: Այդ դեպքում  $f$ -ը նույնպես 1 արժեք է ընդունում, քանի որ  $g_i$ -ն  $f$ -ի իմպլիկանտ է:

Սահմանում 1.15:  $f$  ֆունկցիայի իմպլիկանտների  $J$  համակարգը կոչվում է լրիվ, եթե ցանկացած  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  հավաքի համար, որի դեպքում  $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$ , գոյություն ունի այնպիսի  $g \in J$ , որ  $g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$ :

Թեորեմ 1.8:  $f$  ֆունկցիայի իմպլիկանտների ցանկացած  $J$  լրիվ համակարգին պատկանող բոլոր իմպլիկանտների դիզյունկցիան իրականացնում է  $f$  ֆունկցիան:

Ապացույցն անմիջականորեն հետևում է իմպլիկանտի և իմպլիկանտների լրիվ համակարգի սահմանումներից:

Թեորեմ 1.9: Բուլյան ֆունկցիայի բոլոր պարզ իմպլիկանտների համակարգը իմպլիկանտների լրիվ համակարգ է:

Ապացույցը հետևում է նրանից, որ ֆունկցիայի ԿՂՆՁ-ն բաղկացած է իմպլիկանտներից  $(x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}$  տիպի կոնյունկցիաներից), որոնք կա'ն պարզ իմպլիկանտներ են, կա'ն էլ նրանցից որոշ թվով  $x_i^{\sigma_i} (1 \leq i \leq n)$  արտադրիչներ հեռացնելով՝ կստացվեն պարզ իմպլիկանտներ:

Հետևանք: Բուլյան ֆունկցիայի բոլոր պարզ իմպլիկանտների դիզյունկցիան իրականացնում է այդ ֆունկցիան:

Սահմանում 1.16: Բուլյան ֆունկցիայի բոլոր պարզ իմպլիկանտների դիզյունկցիան կոչվում է նրա կրճատված դիզյունկտիվ նորմալ ձևը (կրճ.ԴՆՁ):

Ֆունկցիայի կրճ.ԴՆՁ-ն կարող է և նվազագույն ԴՆՁ-ն չլինել: Օրինակ,

$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\vee\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\vee\bar{x}_1x_2x_3$  բանաձևով իրականացվող ֆունկցիայի կրճ.ՊՆՁ-ն  $\bar{x}_1\bar{x}_2\vee\bar{x}_1\bar{x}_3\vee x_1x_3\vee\bar{x}_2x_3$  բանաձևն է, մինչդեռ նրա նվազագույն ՊՆՁ-երն են  $\bar{x}_1\bar{x}_3\vee x_1x_3\vee\bar{x}_1\bar{x}_2$  և  $\bar{x}_1\bar{x}_3\vee x_1x_3\vee\bar{x}_2x_3$  բանաձևերը:

**Թեորեմ 1.10:** Ֆունկցիայի նվազագույն գիզյունկտիվ նորմալ ձևը համընկնում է նրա կրճ.ՊՆՁ-ի հետ կամ ստացվում է նրանից որոշ տարրական կոնյունկցիաներ հեռացնելով:

**Ապացույց:** Թեորեմը կապացուցվի, եթե ցույց տանք, որ նվազագույն ՊՆՁ-ում մտնող տարրական կոնյունկցիաները պարզ իմպլիկանտներ են: Իսկ դա ակնհայտ է, քանի որ եթե նվազագույն ՊՆՁ-ն պարունակեր որևէ կոնյունկցիա, որը չլիներ պարզ իմպլիկանտ, ապա նրանից  $x_i^{\sigma_i}$  տեսքի արտադրիչներ հեռացնելով՝ կստանայինք պարզ իմպլիկանտ, և, հետևաբար ավելի քիչ թվով սիմվոլներ պարունակող նույն ֆունկցիան իրականացնող ՊՆՁ, քան նրա նվազագույն ՊՆՁ-ն, որը հակասություն է:

Ինչպես տեսանք վերևում բերված օրինակում, ֆունկցիայի կրճ.ՊՆՁ-ն, ընդհանրապես ասած, չի համընկնում նրա նվազագույն ՊՆՁ-ի հետ: Այնուամենայնիվ, գոյություն ունեն ֆունկցիաների դասեր, որոնց համար այդ գաղափարները համընկնում են:

**Թեորեմ 1.11:**  $f(x_1, \dots, x_n)$  մոնոտոն ֆունկցիայի կրճ.ՊՆՁ-ն փոփոխականների ժխտումներ չի պարունակում և հանդիսանում է նրա միակ նվազագույն ՊՆՁ-ն:

**Ապացույց:** Սկզբում ապացուցենք թեորեմի առաջին մասը: Դիցուք  $f(x_1, \dots, x_n)$  մոնոտոն ֆունկցիայի կրճ.ՊՆՁ-ն պարունակում է  $K = x_{i_1} \dots x_{i_r} \bar{x}_{i_{r+1}} \dots \bar{x}_{i_s}$  իմպլիկանտը, որտեղ  $s > r$ : Այդ դեպքում  $K$  կոնյունկցիան, ինչպես նաև  $f(x_1, \dots, x_n)$  ֆունկցիան, 1 արժեք է ընդունում բոլոր այն  $(x_1, \dots, x_n)$  հավաքների դեպքում, որոնցում  $x_{i_1} = \dots = x_{i_r} = 1$ ,  $x_{i_{r+1}} = \dots = x_{i_s} = 0$ , իսկ մնացած փոփոխականների արժեքները

կամայական են:  $f(x_1, \dots, x_n)$  ֆունկցիայի մոնոտոնության պատճառով այն 1 արժեք կընդունի բոլոր այն  $(x_1, \dots, x_n)$  հավաքների դեպքում, որոնցում  $x_{i_1} = \dots = x_{i_r} = 1$ , իսկ մնացած փոփոխականների (այդ թվում  $x_{i_{r+1}}, \dots, x_{i_s}$ -երի) արժեքները կամայական են: Դա նշանակում է, որ  $K' = x_{i_1} \dots x_{i_r}$  կոնյունկցիան  $f$  ֆունկցիայի համար իմպլիկանտ է, հետևաբար  $K$  կոնյունկցիան  $f$ -ի համար պարզ իմպլիկանտ չէ, որը հակասություն է:

Այժմ ցույց տանք, որ  $f$ -ի նվազագույն ՂՆՁ-ն պարունակում է նրա բոլոր պարզ իմպլիկանտները: Դիցուք  $K = x_{i_1} \dots x_{i_p}$ -ն  $f$ -ի կամայական պարզ իմպլիկանտ է: Դիտարկենք  $(x_1, \dots, x_n)$  հավաքը, որի համար  $x_{i_1} = \dots = x_{i_p} = 1$ , իսկ մնացած փոփոխականների արժեքները 0-են: Այդ հավաքի դեպքում  $K$ -ն, հետևաբար նաև  $f$ -ը, 1 արժեք են ընդունում:  $f$  ֆունկցիայի՝  $K$ -ից տարբեր այլ պարզ իմպլիկանտ նշված հավաքի համար 1 արժեք չի կարող ընդունել, հակառակ դեպքում այն  $K$ -ի մասը կկազմի, այսինքն՝ կստացվի  $K$ -ից՝ նրանից որոշ  $x_{i_j} (1 \leq j \leq p)$  փոփոխականներ հեռացնելով, որից կհետևեր, որ  $K$ -ն պարզ իմպլիկանտ չէ: Այսպիսով,  $K$ -ն պարունակվում է  $f$ -ի նվազագույն ՂՆՁ-ում: Թեորեմն ապացուցվեց:

### 1.8. Կրճատված ՂՆՁ-ի կառուցման մեթոդները

Գոյություն ունի ֆունկցիայի կրճ.ՂՆՁ-ի կառուցման ակնհայտ մեթոդ, որի համար ելակետ է ֆունկցիայի ԿՂՆՁ-ն: Այդ մեթոդի էությունը շարադրված է թեորեմ 1.9-ի ապացույցում: Սակայն այդ մեթոդի ալգորիթմական իրականացումը շատ բարդ է և գործնական իրականացման համար աննպատակահարմար:

Այստեղ բերվում է ֆունկցիայի կրճ.ՂՆՁ-ի գտնելու Քվայնի պատկանող մի ալգորիթմ, որի իրականացումը ավելի պարզ է: Նրա համար դարձյալ ելակետ է ֆունկցիայի ԿՂՆՁ-ն: Ալգորիթմի էությունը պարզաբանելու համար նախ նկարագրենք ֆունկցիայի կրճ.ՂՆՁ-ից նրա ԿՂՆՁ-ին վերադառնալու գործընթացը: Դիցուք տրված է  $f(x_1, \dots, x_n)$  ֆունկցիայի կրճ.ՂՆՁ-ն, որը պարունակում է ո՛չ բոլոր  $x_1, \dots, x_n$  փոփոխականները պարունակող  $x_1^{\sigma_1} \dots x_r^{\sigma_r}$  ( $r < n$ ) պարզ իմպլիկանտը: Ներմուծելով  $x_{r+1}$  փոփոխականը՝  $x_1^{\sigma_1} \dots x_r^{\sigma_r}$ -ը փոխարինենք իրեն համարժեք  $x_1^{\sigma_1} \dots x_r^{\sigma_r} x_{r+1} \vee x_1^{\sigma_1} \dots x_r^{\sigma_r} \bar{x}_{r+1}$  բանաձևով: Ստացված կոնյունկցիաներում նույն կերպ հաջորդաբար ներմուծելով  $x_{r+2}, \dots, x_n$  փոփոխականները՝ կստանանք պարզ իմպլիկանտին համարժեք դիզյունկտիվ նորմալ ձև, որի յուրաքանչյուր անդամը կպարունակի բոլոր  $x_1, \dots, x_n$  փոփոխականները:  $f$ -ի կրճ.ՂՆՁ-ում  $x_1^{\sigma_1} \dots x_r^{\sigma_r}$  պարզ իմպլիկանտը փոխարինենք նրան համարժեք վերոհիշյալ ՂՆՁ-ով: Նույն կերպ վարվելով  $f$ -ի մնացած պարզ իմպլիկանտների հետ՝ կստանանք  $f$ -ի ԿՂՆՁ-ն:

Նկարագրված գործընթացի հակառակ գործընթացը, որը ֆունկցիայի ԿՂՆՁ-ից ստանում է նրա կրճ.ՂՆՁ-ը, իրականացվում է հենց Քվայնի ալգորիթմով, որը տեխնիկապես իրականացվում է հետևյալ կերպ. ելնելով ֆունկցիայի ԿՂՆՁ-ից՝ նրա նկատմամբ, ձախից աջ, հաջորդաբար կիրառվում են հետևյալ ակնհայտ նույնությունները.

$$AxvA\bar{x} = AxvA\bar{x}vA \text{ ("սոսնձում")}$$

$$AuvA = A \text{ ("կլանում")},$$

որտեղ  $A$  -ն և  $u$  -ն կամայական բանաձևեր են,  $x$  -ը՝ փոփոխական: Կիրառումը կատարվում է հետևյալ կերպ. սկզբից կիրառվում է “սոսնձում” նույնությունը բոլոր հնարավոր  $Ax$  և  $A\bar{x}$  տեսքի զույգերի նկատմամբ, այնուհետև արդյունքի վրա կիրառվում է “կլանում” նույնությունը բոլոր հնարավոր  $Au$  և  $A$  տեսքի զույգերի նկատմամբ: Հեշտ է նկատել, որ ստացված ԴՆՁ-ն պարունակում է միայն պարզ իմպլիկանտներ և բոլոր պարզ իմպլիկանտները, այսինքն՝ այն կրճ.ԴՆՁ-ն է:

Օրինակ: Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան.  
 $x_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ : Կատարելով բոլոր հնարավոր սոսնձումները՝ կստանանք.

$$x_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 :$$

Կատարելով բոլոր հնարավոր կլանումները՝ կստանանք.

$$x_1x_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 :$$

Խնդիրներ: Կառուցել հետևյալ ֆունկցիաների կրճ.ԴՆՁ-ն.

1.  $(x_1 \oplus x_2) \rightarrow ((x_1\bar{x}_2) \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3))$ ,
2.  $(x_1 \rightarrow x_2) / (x_2 \rightarrow x_3)$ ,
3.  $x_1 \vee x_2 (x_3 \vee (x_1 \rightarrow x_3))$ ,
4.  $(x_1 \vee x_2)^{x_3} \vee (x_1 \vee x_3)^{x_2} \vee (x_2 \vee x_3)^{x_1}$ ,
5.  $x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 :$

### 1.9. Շեմային ֆունկցիաներ

Սահմանում 1.17:  $f(x_1, \dots, x_n)$  բուլյան ֆունկցիան կոչվում է շեմային, եթե գոյություն ունեն այնպիսի  $\xi_1, \dots, \xi_n$  և  $w$  ամբողջ թվեր, որ կամայական  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  հավաքի համար

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \xi_i \alpha_i \geq w :$$

$\xi_1, \dots, \xi_n$  թվերը կոչվում են համապատասխանաբար  $x_1, \dots, x_n$  փոփոխականների կշիռներ,  $w$  -ն՝  $f(x_1, \dots, x_n)$  ֆունկցիայի շեմը:

Այդ դեպքում կասենք, որ  $\langle f, \xi, w \rangle$  եռյակը, որտեղ  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , իրականացնելի է: Նշված եռյակի իրականացնելի լինելու փաստը գրվում է այսպես.  $\langle f, \xi, w \rangle = 1$ , իսկ եթե այն իրականացնելի չէ, ապա գրվում է այսպես.  $\langle f, \xi, w \rangle = 0$ :

Շեմային ֆունկցիայի սահմանումից հետևում է, որ  $f(x_1, \dots, x_n)$  ֆունկցիայի շեմային լինելու համար, անհրաժեշտ է և բավարար, որ անհավասարությունների

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \alpha_i \geq w, \quad \text{երբ} \quad f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1 \quad \text{և} \quad \sum_{i=1}^n \xi_i \alpha_i < w, \quad \text{երբ} \quad f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$$

համակարգը, որտեղ  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  հավաքը ընդունում է բոլոր հնարավոր  $2^n$  արժեքները, լուծում ունենա: Այսպիսով, շեմային ֆունկցիայի ճանաչողության խնդրի լուծումը համարժեք է ալգորիթմական տեսակետից չափազանց բարդ խնդրի լուծմանը: Այնուամենայնիվ, գոյություն ունեն բավական հեշտ ճանաչվող շեմային ֆունկցիաներ, որոնց օգնությամբ էլ կառուցվում են շեմային ֆունկցիաների գործնական հետաքրքրություն ներկայացնող բավականաչափ լայն դասեր:

Նախապես դիտարկենք պարզագույն շեմային ֆունկցիաների օրինակներ:

1.  $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_n$ : Հեշտ է նկատել, որ  $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 1, w = n$ :
2.  $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$ : Այս ֆունկցիայի համար կարելի է ընտրել  $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 1, w = 1$ :
3.  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_3$ : Այս ֆունկցիայի համար  $\xi_1 = \xi_2 = 1, \xi_3 = 2, w = 2$ :
4. 0 և 1 հաստատունները նույնպես շեմային են: Իրոք, եթե ընդունենք  $f_1(x_1, x_2) = 1$  և  $f_2(x_1, x_2) = 0$ , ապա առաջինի համար  $\xi_1 = \xi_2 = w = 0$ , իսկ երկրորդի համար՝  $\xi_1 = \xi_2 = 0, w = 1$ :

Նկատենք, որ  $\xi_1, \dots, \xi_n, w$  թվերով համապատասխան  $f(x_1, \dots, x_n)$  շեմային ֆունկցիան միարժեքորեն վերականգնվում է, մինչդեռ այդ նույն ֆունկցիային կարող են համապատասխանել փոփոխականների այլ կշիռներ և շեմ, օրինակ, հետևյալ թվերը.  $k\xi_1, \dots, k\xi_n, kw$ , որտեղ  $k$  – ն կամայական ամբողջ դրական թիվ է:

**Թեորեմ 1.12:**  $\langle f, \xi, w \rangle = \langle \bar{f}, \bar{\xi}, \bar{w} \rangle$ , որտեղ  $\bar{\xi} = (-\xi_1, \dots, -\xi_n)$ ,  
 $\bar{w} = 1 - w$ :

**Ապացույց:**

$$\langle f, \xi, w \rangle = 1 \Leftrightarrow \langle f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \xi_i \alpha_i < w \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle \bar{f}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1 \Leftrightarrow \sum (-\xi_i) \alpha_i > -w \rangle:$$

$$\langle \bar{f}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (-\xi_i) \alpha_i \geq 1 - w \rangle \Leftrightarrow \langle \bar{f}, \bar{\xi}, \bar{w} \rangle = 1$$

**Թեորեմ 1.13:**  $\langle f, \xi, w \rangle = \langle f^{(i)}, \xi^{(i)}, w^{(i)} \rangle$ , որտեղ

$$f^{(i)} = f(x_1, \dots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad \xi^{(i)} = (\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, -\xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n),$$

$$w^{(i)} = w - \xi_i:$$

**Ապացույց:**

$$\langle f, \xi, w \rangle = 1 \Leftrightarrow \langle f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \xi_i \alpha_i \geq w \rangle \Leftrightarrow$$

$$\langle f^{(i)}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1 \Leftrightarrow \xi_1 \alpha_1 + \dots + \xi_{i-1} \alpha_{i-1} + \xi_i \bar{\alpha}_i + \xi_{i+1} \alpha_{i+1} +$$

$$+ \dots + \xi_n \alpha_n \geq w \rangle \Leftrightarrow \langle f^{(i)}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1 \Leftrightarrow \xi_1 \alpha_1 + \dots + \xi_{i-1} \alpha_{i-1} +$$

$$(-\xi_i) \alpha_i + \xi_{i+1} \alpha_{i+1} + \dots + \xi_n \alpha_n \geq w - \xi_i \rangle \Leftrightarrow \langle f^{(i)}, \xi^{(i)}, w^{(i)} \rangle = 1:$$

**Չեռևանք 1:** Եթե  $f(x_1, \dots, x_n)$  -ը շեմային է, ապա 0 -ների ու 1 -երի կամայական  $(\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$  հավաքի համար  $f^\sigma(x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n})$  -ը նույնպես շեմային է:

Հետևանք 2: Կամայական  $f(x_1, \dots, x_n)$  շեմային ֆունկցիայի համար կարելի է նշել 0-ների ու 1-երի այնպիսի  $(\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$  հավաք, որ  $f_1(x_1, \dots, x_n) = f^\sigma(x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n})$  ֆունկցիան լինի դրական-շեմային, այսինքն՝ գոյություն ունենան  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $\xi_i \geq 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ) և  $w \geq 0$ , որ  $\langle f_1, \xi, w \rangle = 1$ :

Թեորեմ 1.14: Փոփոխականների  $\xi_i > 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ) կշիռներով և  $w > 0$  շեմով ցանկացած  $f(x_1, \dots, x_n)$  դրական-շեմային ֆունկցիա կարելի է ստանալ փոփոխականների 1 կշիռներով և  $w$  շեմով  $\xi_1 + \dots + \xi_n$  փոփոխականներից կախված շեմային ֆունկցիայից նրա փոփոխականները որոշակի եղանակով  $x_1, \dots, x_n$  փոփոխականներով փոխարինելով:

Ապացույց: Դիտարկենք  $F(x_1, \dots, x_{\xi_1 + \dots + \xi_n})$  շեմային ֆունկցիան, որի փոփոխականներն ունեն 1 կշիռներ, իսկ շեմը հավասար է  $w$ -ի: Այդ դեպքում հեշտ է նկատել, որ

$$f(x_1, \dots, x_n) = F(\overbrace{x_1, \dots, x_1}^{\xi_1}, \overbrace{x_2, \dots, x_2}^{\xi_2}, \dots, \overbrace{x_n, \dots, x_n}^{\xi_n}):$$

Թեորեմ 1.15: Ցանկացած դրական-շեմային ֆունկցիա մոնոտոն է:

Ապացույց: Դիցուք  $f(x_1, \dots, x_n)$ -ը դրական-շեմային է:

Դիտարկենք  $\tilde{\alpha}$  և  $\tilde{\beta}$  կամայական հավաքները, որտեղ  $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ :

Դիցուք  $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{i_k-1}, 0, \alpha_{i_k+1}, \dots, \alpha_n)$ ,

$$\tilde{\beta} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{i_k-1}, 1, \alpha_{i_k+1}, \dots, \alpha_n):$$

Այդ դեպքում պարզ է, որ

$$\begin{aligned} \xi_1 \alpha_1 + \dots + \xi_{i-1} \alpha_{i-1} + \xi_i \cdot 0 + \xi_{i+1} \alpha_{i+1} + \dots + \xi_{i_k-1} \alpha_{i_k-1} + \xi_{i_k} \cdot 0 + \xi_{i_k+1} \alpha_{i_k+1} + \dots + \xi_n \alpha_n \leq \\ \xi_1 \alpha_1 + \dots + \xi_{i-1} \alpha_{i-1} + \xi_i \cdot 1 + \xi_{i+1} \alpha_{i+1} + \dots + \xi_{i_k-1} \alpha_{i_k-1} + \xi_{i_k} \cdot 1 + \xi_{i_k+1} \alpha_{i_k+1} + \dots + \xi_n \alpha_n, \end{aligned}$$

որից էլ կհետևի, որ  $f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta})$ :

Դիտողություն: Ո՛չ բոլոր մոնոտոն ֆունկցիաներն են շեմային: Հակօրինակ կարող է ծառայել  $x_1 x_2 \vee x_3 x_4$  ֆունկցիան: Իսկապես, եթե վերջինս շեմային լիներ, ապա գոյություն

կունենային  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  կշիռներ և  $w$  շեն, որոնց համար տեղի կունենային հետևյալ առնչությունները.

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 \geq w \\ \xi_3 + \xi_4 \geq w \\ \xi_1 + \xi_3 < w \\ \xi_2 + \xi_4 < w \end{cases}$$

Անհավասարությունների այս համակարգը հակասական է, քանի որ առաջին երկու անհավասարությունների գումարից կստացվի  $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 \geq 2w$ , իսկ վերջին երկուսի գումարից՝  $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 < 2w$ :

Խնդիրներ:

1. Ցույց տալ, որ  $x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$  ֆունկցիան շենային է:
2. Կառուցել փոփոխականների  $\xi_1 = 2, \xi_2 = 1, \xi_3 = 3$  կշիռներ և  $w = 4$  շեն ունեցող շենային ֆունկցիայի կրճ. ԴՆՁ-ն:
3. Փոփոխականների  $\xi_1 = 1, \xi_2 = 3, \xi_3 = 5$  կշիռներ և  $w = 5$  շեն ունեցող շենային ֆունկցիան  $f(x_1, x_2, x_3)$ -ն է:  
Կառուցել  $f(x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  ֆունկցիայի ժեզալկինի բազմանդամը:
4. Ցույց տալ, որ եթե  $\phi(x_1, \dots, x_k)$  և  $\varphi(x_{k+1}, \dots, x_n)$  ֆունկցիաները հաստատուններ չեն, ապա  $\phi(x_1, \dots, x_k) \oplus \varphi(x_{k+1}, \dots, x_n)$  ֆունկցիան շենային չէ:

#### 1.10. Բուլյան ֆունկցիայի արգումենտների ակտիվությունը

Իր արգումենտներից բուլյան ֆունկցիայի կախվածության “չափը” բնորոշվում է այդ արգումենտների ակտիվությամբ, որի սահմանումը և հատկությունները կբերվեն բաժնում: Նախապես սահմանենք բուլյան ֆունկցիայի նորմայի գաղափարը:

Սահմանում 1.18:  $f(x_1, \dots, x_n)$  բուլյան ֆունկցիայի նորմա կոչվում է հետևյալ թիվը.

$$\|f(\tilde{x})\| = 2^{-n} \sum_{\tilde{\alpha} \in E^n} f(\tilde{\alpha}):$$

Նշենք նորմայի որոշ հատկություններ.

1ն. Ֆունկցիայի նորման չի փոխվի ո՛չ էական փոփոխականներ ներմուծելու կամ հեռացնելու դեպքում:

Ապացույց: Դիցուք  $f(x_1, \dots, x_n)$  ֆունկցիայում ներմուծվում է  $x_{n+1}$  ո՛չ էական փոփոխականը, որի հետևանքով ստացվում է  $f(x_1, \dots, x_n)$ -ին հավասար  $g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$  ֆունկցիան: Քանի որ  $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n, 1)$ , ապա

$$\|g(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})\| = 2^{-(n+1)} \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \in E^{n+1}} g(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) = 2^{-(n+1)}$$

$$\left( \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E^n} g(\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0) + \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E^n} g(\alpha_1, \dots, \alpha_n, 1) \right) =$$

$$2^{-n} \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in E^n} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \|f(x_1, \dots, x_n)\|:$$

$$2\text{ն. } \|\tilde{f}(\tilde{x})\| = 1 - \|f(\tilde{x})\|:$$

Ապացույցը հետևում է  $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$  նույնությունից և նորմայի սահմանումից:

3ն. Ցանկացած  $f(x_1, \dots, x_n)$  ֆունկցիայի և զրոների ու մեկերի  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  հավաքի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.  $\|f(x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n})\| = \|f(x_1, \dots, x_n)\|:$

Ապացույցը հետևում է նրանից, որ ցանկացած  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  հավաքի համար նրան փոխ-միարժեքորեն համապատասխանում է  $(\alpha_1^{\sigma_1}, \dots, \alpha_n^{\sigma_n})$  հավաքը, և որ  $f(x_1, \dots, x_n)$  և  $f(x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n})$  ֆունկցիաները այդ հավաքների վրա համապատասխանաբար ընդունում են միևնույն արժեքը՝

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f((\alpha_1^{\sigma_1})^{\sigma_1}, \dots, (\alpha_n^{\sigma_n})^{\sigma_n}):$$

4ն. Ցանկացած  $f_1(\tilde{x})$  և  $f_2(\tilde{x})$  ֆունկցիաների համար՝