

5. $\{x_1/x_2\}$ – համակարգը լրիվ է: Ապացույցը հետևում է 3 կետում բերված համակարգի լրիվությունից և հետևյալ հավասարություններից $x/x=\bar{x}$, $(x_1/x_2)/(x_1/x_2)=x_1x_2$:
6. $\{0, 1, x_1x_2, x_2 \oplus x_2\}$ համակարգը լրիվ է: Բավական է նկատել, որ $x \oplus 1 = \bar{x}$:

Սահմանում 1.8: $\oplus a_{i_1}, \dots, i_k x_{i_1} \dots x_{i_k}$ արտահայտությունը, որտեղ mod2-ով գումարը վերցվում է ըստ ինդեքսների բոլոր հնարավոր 2^n կարգավորված $(i_1, \dots, i_k)$ ($1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$) հավաքների $(a_{i_1}, \dots, i_k \in \{0,1\})$, կոչվում է **ժեզալկինի բազմանդամ**:

Ակնհայտ է, որ ցանկացած բուլյան ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել ժեզալկինի բազմանդամի տեսքով: Դա հետևում է 6 համակարգի լրիվությունից և հետևյալ նույնություններից.

$$\bar{x} = 1 \oplus x,$$

$$x_1 \vee x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2:$$

Իսկապես, եթե ֆունկցիայի ԿԿՆՁ – ուն հիշյալ նույնությունները կիրառենք ձախից աջ, և այնուհետև կատարենք որոշ նույնական ձևափոխություններ, ապա կստանանք այդ ֆունկցիայի ժեզալկինի բազմանդամը: Օրինակ,

$$\overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_2} \overline{x_3} = \overline{x_1 x_2 x_3} \oplus \overline{x_1 x_2} \overline{x_3} = x_1(1 \oplus x_2)x_3 \oplus (1 \oplus x_1)x_2(1 \oplus x_3) = x_1x_3 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_2x_3 = x_1x_3 \oplus x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2:$$

Քանի որ n փոփոխականի ֆունկցիայի ժեզալկինի բազմանդամի գործակիցների թիվը հավասար է 2^n - ի, ուստի այդ նույն փոփոխականներից կախված՝ ժեզալկինի բազմանդամների թիվը հավասար կլինի 2^2 - ի, այսինքն՝ այդ նույն փոփոխականներից կախված՝ բոլոր բուլյան ֆունկցիաների թվին: Այստեղից հետևում է, որ յուրաքանչյուր բուլյան ֆունկցիա իրականացվում է միակ ժեզալկինի բազմանդամով:

Խնդիրներ: Կառուցել հետևյալ ֆունկցիաների ժեզալկինի բազմանդամները.

1. $x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$:
2. $(x_1 \rightarrow \bar{x}_2) \oplus \bar{x}_3$:
3. $(x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3$:
4. $(x_1 x_2)^{x_3} \vee (x_2 x_3)^{x_1}$:
5. $\overline{(x_1 x_2 \rightarrow x_3)} \rightarrow (x_2 \vee x_3)$:

1.5. Ֆունկցիաների համակարգի լրիվության մասին թեորեմը

Մեր մոտակա նպատակն է նշել պայմաններ, որոնք անհրաժեշտ են և բավարար, որպեսզի ֆունկցիաների տվյալ համակարգը լինի լրիվ: Այդ նպատակով մենք կկառուցենք ֆունկցիաների որոշ դասեր, որոնց միջոցով էլ կնկարագրենք այդ պայմանները:

ա) 0 հաստատունը պահպանող ֆունկցիաների T_0 դասը: Դրանք այն $f(x_1, \dots, x_n)$ ֆունկցիաներն են, որոնց համար տեղի ունի $f(0, \dots, 0) = 0$ հավասարությունը: Օրինակ, $x_1 x_2$, $x_1 \vee x_2 \in T_0$, մինչդեռ $\bar{x}$, $x_1 \vee \bar{x}_2 \notin T_0$: Քանի որ T_0 – ին պատկանող $f(x_1, \dots, x_n)$ ֆունկցիան $(0, \dots, 0)$ հավաքի դեպքում ընդունում է 0 արժեք, իսկ մնացած $2^n - 1$ հավաքների դեպքում՝ կամայական (0 կամ 1) արժեքներ, ուստի $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականներից կախված 0 հաստատունը պահպանող բոլոր ֆունկցիաների թիվը հավասար կլինի

$$2^{2^n - 1} = 0.5 \cdot 2^{2^n} :$$

Ցույց տանք, որ T_0 դասը փակ է: Քանի որ x_i ($i = 1, 2, \dots, k, \dots$) ֆունկցիաները $g(x_1, \dots, x_n)$ պատկանում են T_0 -ին,

ապա բավական է ցույց տալ, որ եթե $f(x_1, \dots, x_n)$, $g(x_1, \dots, x_n) \in T_0$, ապա $f(g(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \in T_0$: Դա հետևում է հետևյալ հավասարությունից.

$$f(g(0, \dots, 0), 0, \dots, 0) = f(0, 0, \dots, 0):$$

բ) 1 հաստատումը պահպանող ֆունկցիաների T_1 դասը: Դրանք այն $f(x_1, \dots, x_n)$ ֆունկցիաներն են, որոնց համար տեղի ունի $f(1, \dots, 1) = 1$ հավասարությունը: Օրինակ, $x_1 x_2$, $x_1 \vee x_2 \in T_1$, $\bar{x}$, $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \notin T_1$

T_1 դասի համար վերևում ապացուցվածի համանմանությամբ ապացուցվում է, որ $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականներից կախված T_1 -ին պատկանող բոլոր ֆունկցիաների թիվը հավասար է $2^{2^n - 1} = 0.5 \cdot 2^{2^n}$: Նույն կերպ ապացուցվում է նաև T_1 -ի փակ լինելը:

գ) Ինքնաերկակի ֆունկցիաների S դասը: $f(x_1, \dots, x_n)$ ֆունկցիան կոչվում է ինքնաերկակի, եթե 0-ներից ու 1-երից բաղկացած ցանկացած $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ հավաքի համար տեղի ունի

$$\bar{f}(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

հավասարությունը: Վերջին հավասարությունը համարժեք է $f(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) = \bar{f}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

հավասարությանը, որն էլ նշանակում է, որ $f(x_1, \dots, x_n)$ ֆունկցիան ցանկացած $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ հավաքի համար $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$ և $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ հավաքների վրա ընդունում է տարբեր արժեքներ: Այստեղից հետևում է, որ $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականներից կախված ինքնաերկակի ֆունկցիայի տրման համար բավական է ունենալ նրա արժեքները աղյուսակի միայն առաջին 2^{n-1} հավաքների համար: Հետևաբար, $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականներից կախված բոլոր ինքնաերկակի ֆունկցիաների թիվը հավասար կլինի

$$2^{2^{n-1}} = \sqrt{2^{2^n}} :$$

S դասը փակ է՝ $[S]=S$: Իրոք, քանի որ $x_i \in S$, ապա բավական է ցույց տալ, որ

$f(g(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \in S$, եթե $f(x_1, \dots, x_n) \in S$ և $g(x_1, \dots, x_n) \in S$: Դիցուք $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – ը կամայական հավաք է: Այդ դեպքում

$$\bar{f}(g(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n), \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n) = \bar{f}(\bar{g}(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n) = f(g(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha_2, \dots, \alpha_n):$$

Լեմմա (ո՛չ ինքնաերկակի ֆունկցիայի մասին):

$f(x_1, \dots, x_n) \notin S \Rightarrow 0, 1 \in [\{\bar{x}, f(x_1, \dots, x_n)\}]$:

Ապացույց: Քանի որ $f \notin S$, ապա գոյություն ունի $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ հավաք, որի համար $f(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$: Լեմմայի ապացույցը հետևյալն է.

1. $\bar{x}$ բազիս,
2. $f(x_1, \dots, x_n)$ բազիս,
3. $\bar{\bar{x}} = x$ ինդուկցիոն քայլ 1,1,
4. $\phi(x) = f(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_n})$ ինդուկցիոն քայլ 1,2,3,
5. $\bar{\phi}(x)$ ինդուկցիոն քայլ 1,4:

Այստեղ

$$\phi(0) = f(0^{\alpha_1}, \dots, 0^{\alpha_n}) = f(\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) = f(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) = f(1^{\alpha_1}, \dots, 1^{\alpha_n}) = \phi(1):$$

Հետևաբար $\phi(x)$ – ը հաստատուններից մեկն է, իսկ $\bar{\phi}(x)$ – ը՝ մյուսը:

դ) Մոնոտոն ֆունկցիաների M դասը: Կասենք, որ $\tilde{\alpha}_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ հավաքը նախորդում է $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ հավաքին, և այդ փաստը կգրենք այսպես՝ $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$, եթե $\alpha_i \leq \beta_i$, $i = 1, 2, \dots, n$: Ակնհայտ է, որ նախորդելու առնչությունը օժտված է տրանզիտիվության հատկությամբ, այսինքն եթե $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ և

$\tilde{\beta} < \tilde{\gamma}$, ապա $\tilde{\alpha} < \tilde{\gamma} : \tilde{\alpha}$ և $\tilde{\beta}$ հավաքները կոչվում են բաղդատելի, եթե նրանցից որևէ մեկը նախորդում է մյուսին: Գոյություն ունեն ոչ բաղդատելի հավաքներ. օրինակ, $(0,1)$ -ը և $(1,0)$ -ն:

Սահմանում 1.9: $f(x_1, \dots, x_n)$ ֆունկցիան կոչվում է մոնոտոն, եթե ցանկացած $\tilde{\alpha}$ և $\tilde{\beta}$ հավաքների համար, որտեղ $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$, տեղի ունի $f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta})$ անհավասարությունը:

Ակնհայտ է, որ 0 , 1 , x , $x_1 x_2$, $x_1 \vee x_2$, ֆունկցիաները մոնոտոն են, իսկ $\bar{x}$ և $\bar{x}_1 \vee x_2$ ֆունկցիաները՝ ոչ: Վերջին

ֆունկցիայի համար մոնոտոնության պայմանը խախտվում է $(0,0)$ և $(1,0)$ հավաքների զույգի համար: Ցույց տանք, որ մոնոտոն ֆունկցիաների դասը փակ է՝ $[M] = M$: Իրոք, քանի որ $x_i \in M$, ապա բավական է ցույց տալ, որ $f(g(x_1, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n) \in M$, եթե $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$ և $g(x_1, \dots, x_n) \in M$:

Դիցուք $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) < \tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$: $g(x_1, \dots, x_n) -$ ի մոնոտոնության

պատճառով $g(\tilde{\alpha}) \leq g(\tilde{\beta})$: Հետևաբար,

$$\phi(\tilde{\alpha}) = f(g(\tilde{\alpha}), \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq f(g(\tilde{\beta}), \beta_2, \dots, \beta_n) = \phi(\tilde{\beta}):$$

$\tilde{\alpha}$ և $\tilde{\beta}$ հավաքները կանվանենք հարևան հավաքներ (i -րդ կոորդինատի նկատմամբ), եթե

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n),$$

$$\tilde{\beta} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \bar{\alpha}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n):$$

Լեմմա (ոչ մոնոտոն ֆունկցիայի մասին):
 $f \notin M \Rightarrow \bar{x} \in [\{0,1,f\}]$:

Ապացույց: Քանի որ f -ը մոնոտոն չէ, ապա գոյություն կունենան այնպիսի $\tilde{\alpha}'$ և

$\tilde{\beta}'$ հավաքներ, որ $\tilde{\alpha}' < \tilde{\beta}'$ և $f(\tilde{\alpha}') > f(\tilde{\beta}')$: Եթե $\tilde{\alpha}'$ և $\tilde{\beta}'$ հարևան հավաքներ չեն, ապա նրանք կտարբերվեն t ($t > 1$)

կոորդինատներով, ընդ որում այդ կոորդինատները $\tilde{\alpha}'$ -ում ունեն 0 արժեքներ, իսկ $\tilde{\beta}'$ -ում՝ 1 արժեքներ: Այդ դեպքում $\tilde{\alpha}'$ և $\tilde{\beta}'$ հավաքների միջև կարելի է տեղավորել այպիսի t -1 միջանկյալ $\tilde{\alpha}^2, \dots, \tilde{\alpha}'$ հավաքներ, որ

$$\tilde{\alpha}' \leq \tilde{\alpha}^2 \leq \tilde{\alpha}^3 \leq \dots \leq \tilde{\alpha}' \leq \tilde{\beta}':$$

Ակնհայտ է, որ այս շղթայում իրար կողք գրված հավաքները հարևան հավաքներ են: Քանի որ $f(\tilde{\alpha}') > f(\tilde{\beta}')$, ապա շղթայում կգտնվեն այնպիսի երկու հարևաններ (նշանակենք դրանք $\tilde{\alpha}$ -ով ու $\tilde{\beta}$ -ով, $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$), որ տեղի ունենա $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$ անհավասարությունը, այսինքն՝ $f(\tilde{\alpha}) = 1$ և $f(\tilde{\beta}) = 0$: Դիցուք

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$$

$$\tilde{\beta} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n):$$

Այժմ արդեն լեմմայի ապացույցը հետևյալն է.

1. 0 բազիս,
2. 1 բազիս,
3. $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ բազիս,
4. $\phi(x) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ ինդուկցիոն բայլ 1, 2, 3:

Ակնհայտ է, որ $\phi(x) = \bar{x}$, քանի որ $\phi(0) = f(\tilde{\alpha}) = 1$, $\phi(1) = f(\tilde{\beta}) = 0$:

ե) Գծային ֆունկցիաների L դասը:

Սահմանում 1.10: $f(x_1, \dots, x_n)$ ֆունկցիան կոչվում է գծային, եթե նրա ժեգալկինի բազմանդամը փոփոխականների արտադրյալներ չի պարունակում, այսինքն ունի հետևյալ տեսքը.

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n,$$

որտեղ $a_i \in \{0, 1\}$, $i=1, 2, \dots, n$:

Քանի որ գծային ֆունկցիան միարժեքորեն որոշվում է $a_0, a_1, \dots, a_n$ գործակիցներով, ապա $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականներից կախված բոլոր գծային ֆունկցիաների թիվը հավասար կլինի

2^{n+1} –ի: Ակնհայտ է, որ գծային ֆունկցիաների դասը համընկնում է $\{1, x_1 \oplus x_2\}$ համակարգի փակման հետ և այդ պատճառով փակ է:

Լեմմա (ո՛չ գծային ֆունկցիայի մասին):
 $f \notin L \Rightarrow x_1 x_2 \in [\{0, 1, \bar{x}, f\}]$:

Ապացույց: Քանի որ $f(x_1, \dots, x_n)$ ֆունկցիան գծային չէ, ապա նրա ժեզալկինի բազմանդամը կարունակի գոնե մեկ անդամ, որը պարունակում է փոփոխականների արտադրյալ: Դիցուք այդ անդամը պարունակում է $x_1 x_2$ արտադրյալը: Այդ դեպքում $f(x_1, \dots, x_n)$ -ը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով.

$$f(x_1, \dots, x_2) = x_1 x_2 f_1(x_3, \dots, x_n) \oplus x_1 f_2(x_3, \dots, x_n) \oplus x_2 f_3(x_3, \dots, x_n) \oplus f(x_3, \dots, x_n),$$

որտեղ $f(x_3, \dots, x_n) \neq 0$, այսինքն՝ որևէ $(\alpha_3, \dots, \alpha_n)$ – ի համար $f_1(\alpha_3, \dots, \alpha_n) = 1$: Այժմ արդեն Լեմմայի ապացույցը հետևյալն է.

1. 0 բազիս,
2. 1 բազիս,
3. $\bar{x}$ բազիս,
4. $f(x_1, \dots, x_n)$ բազիս,
5. $\bar{x}_1$ ինդուկցիոն քայլ 3,
6. $\bar{x}_2$ ինդուկցիոն քայլ 3,
7. $\phi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = x_1 x_2 \oplus \alpha x_1 \oplus \beta x_2 \oplus \gamma$,
 որտեղ $\alpha = f_2(\alpha_3, \dots, \alpha_n)$, $\beta = f_3(\alpha_3, \dots, \alpha_n)$,
 $\gamma = f_4(\alpha_3, \dots, \alpha_n)$ ինդուկցիոն քայլ 1, 2, 4,
8. $\phi(x_1, x_2) = \phi(x_1 \oplus \beta, x_2 \oplus \alpha) = (x_1 \oplus \beta)(x_2 \oplus \alpha) \oplus \alpha(x_1 \oplus \beta) \oplus \beta(x_2 \oplus \alpha) = x_1 x_2 \oplus \alpha \beta \oplus \gamma$
 ինդուկցիոն քայլ 5, 6, 7,
9. $\bar{\phi}(x_1, x_2) = x_1 x_2 \oplus \alpha \beta \oplus \gamma \oplus 1$ ինդուկցիոն քայլ 3, 8:

Ակնհայտ է, որ $\phi(x_1, x_2)$ կամ $\bar{\phi}(x_1, x_2)$ ֆունկցիաներից մեկը $x_1 x_2$ -ն է:

Նկատենք, որ T_0 , T_1 , S , M , L դասերը զույգ առ զույգ իրարից տարբեր են, որը երևում է աղյուսակ 5-ից, որում “+” նշանը ցույց է տալիս, որ ֆունկցիան պարունակվում է համապատասխան դասում, իսկ “-” նշանը՝ չի պարունակվում:

Աղյուսակ 5

	T_0	T_1	S	M	L
0	+	-	-	+	+
1	-	+	-	+	+
$\bar{x}$	-	-	+	-	+

Այժմ անցնենք ֆունկցիաների համակարգի լրիվությանը վերաբերող անհրաժեշտ ու բավարար պայմանների քննարկմանը:

Թեորեմ (Փոստ) 1.4: Որպեսզի ֆունկցիաների F համակարգը լինի լրիվ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն ամբողջովին ընկած չլինի T_0 , T_1 , S , M և L դասերից ոչ մեկի մեջ:

Ապացույց: Անհրաժեշտությունը: Դիցուք F -ը լրիվ է, սակայն պարունակվում է վերոհիշյալ 5 դասերից մեկում, որը կնշանակենք K -ով: Այդ դեպքում $P=[F] \subseteq [K]=K$, այսինքն՝ $P=K$, որը հակասություն է: Անհրաժեշտությունն ապացուցվեց:

Բավարարությունը: Դիցուք F -ը չի պարունակվում թեորեմում նշված 5 դասերից ոչ մեկում: Այդ դեպքում F -ից կարելի է անջատել f_0, f_1, f_s, f_m և f_l (ոչ անպայման իրարից տարբեր) ֆունկցիաներ, որոնք համապատասխանաբար չեն պատկանում T_0 , T_1 , S , M և L դասերին: Կարելի է համարել, որ բոլոր այդ ֆունկցիաները կախված են միևնույն $x_1, \dots, x_n$

փոփոխականներից, հակառակ դեպքում n' էական փոփոխականների ներմուծմամբ միշտ էլ կարելի է դրան հասնել: Բավարարության ապացուցման համար բավական է ցույց տալ, որ $\{f_0, f_1, f_s, f_m, f_l\}$ համակարգը լրիվ է՝ $[\{f_0, f_1, f_s, f_m, f_l\}] = P$: Նախ ցույց տանք, որ $\{0, 1\} \subseteq [\{f_0, f_1, f_s\}]$: Դիտարկենք քննարկման ենթակա բոլոր հնարավոր դեպքերը.

ա) $f_0(1, \dots, 1) = 1, f_1(0, \dots, 0) = 0$: Ակնհայտ է, որ $\phi(x) = f_0(x, \dots, x) = 1$ և $\phi(x) = f_1(x, \dots, x) = 0$, քանի որ $\phi(0) = \phi(1) = 1, \phi(0) = \phi(1) = 1$:

բ) $f_0(1, \dots, 1) = 1, f_1(0, \dots, 0) = 1$: Այս դեպքում $\phi(x) = 1$ և $\phi(x) = \bar{x}$, քանի որ $\phi(0) = 1, \phi(1) = 0$: Այսպիսով, ունենալով 1 հաստատունը և $\bar{x}$ ֆունկցիան, կունենանք նաև 0 հաստատունը:

գ) $f_0(1, \dots, 1) = 0, f_1(0, \dots, 0) = 0$: Այս դեպքում $\phi(x) = \bar{x}$, քանի որ $\phi(1) = 0, \phi(0) = 1$ և $\phi(x) = 0$, քանի որ $\phi(0) = 0$ և $\phi(1) = 0$: Ունենալով $\bar{x}$ -ը և 0-ն, կունենանք նաև 1-ը:

դ) $f_0(1, \dots, 1) = 0, f_1(0, \dots, 0) = 1$: Այս դեպքում $\phi(x) = \bar{x}$, $\phi(x) = \bar{x}$: Սակայն $\bar{x}$ -ից և n' ինքնատերականի f_s ֆունկցիայից n' ինքնատերականի ֆունկցիայի մասին լեմմայի համաձայն կարելի է ստանալ 0 և 1 հաստատունները:

Համաձայն n' մոնոտոն ֆունկցիայի մասին լեմմայի՝ $\bar{x} \in [\{0, 1, f_m\}]$, իսկ համաձայն n' գծային ֆունկցիայի մասին լեմմայի՝ $x_1 x_2 \in [\{0, 1, \bar{x}, f_l\}]$: Հետևաբար

$\{\bar{x}, x_1 x_2\} \subseteq [\{f_0, f_1, f_s, f_m, f_l\}] \in [F]$: Թեորեմն ապացուցված է:

Օգտվելով Փոստի թեորեմից՝ ստուգել հետևյալ համակարգերի լրիվությունը.

- 1) $\{x_1 \vee x_2, x_1 \rightarrow x_2, x_1 x_2 x_3\}$,
- 2) $\{x_1 \oplus x_2, x_1 \vee \bar{x}_2\}$,
- 3) $\{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3, x_1 \vee x_2 \vee x_3\}$,
- 4) $\{1, 0, \bar{x}, (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_3\}$,

$$5) \{x_1^{x_2}, x_1^{x_3}, x_2^{x_3}, \bar{x}, x_1 x_2 \bar{x}_3\},$$

$$6) \{(x_1 \vee x_2)^{\bar{x}_3}, x_1^{x_2 x_3}, x_1 x_2\}:$$

1.6. Բուլյան ֆունկցիաների նախալրիվ դասերը

Սահմանում 1.11: Բուլյան ֆունկցիաների F համակարգը կոչվում է նախալրիվ, եթե այն լրիվ չէ, սակայն լրիվ կդառնա, եթե նրան ավելացնենք նրան չպատկանող կամայական ֆունկցիա:

Այս սահմանումից հետևում է, որ նախալրիվ համակարգը փակ է: Իրոք, եթե այն փակ չլիներ, ապա նրա փակմանը պատկանող և իրեն չպատկանող ֆունկցիայով համալրելիս այն լրիվ չէր դառնա, որը կհակասեր նրա նախալրիվ լինելու պայմանին:

Թեորեմ 1.5: T_0, T_1, S, M, L դասերից յուրաքանչյուրը նախալրիվ է:

Ապացույց: Դիցուք F - ը նշված հինգ դասերից ցանկացածն է: Ցույց տանք, որ F - ը նախալրիվ է: Դիցուք f - ը կամայական ֆունկցիա է, և $f \notin F$: Ակնհայտ է, որ $F \cup \{f\}$ - ը ընկած չէ նշված հինգ դասերից ո՛չ մեկի մեջ, և Փոստի թեորեմի համաձայն լրիվ է:

Թեորեմ 1.6: Միայն T_0, T_1, S, M, L դասերն են նախալրիվ:

Ապացույց: Դիցուք K - ն նախալրիվ է: Ցույց տանք, որ այն համընկնում է նշված հինգ դասերից որևէ մեկի հետ: Քանի որ K - ն լրիվ չէ, ապա Փոստի թեորեմի համաձայն այն ամբողջովին ընկած է հիշյալ դասերից որևէ մեկի մեջ: Դիցուք այդ դասը F - ն է՝ $K \subseteq F$: Եթե $K \neq F$, ապա F - ը կպարունակի մի f ֆունկցիա, որը չի պարունակվում K -ում: Այդ դեպքում $K \cup \{f\} \subseteq F$, այսինքն՝ $K \cup \{f\}$ - ը լրիվ չէ, որը հակասում է K -ի նախալրիվ լինելու պայմանին: Հետևաբար $K = F$: Թեորեմն ապացուցվեց:

1.7. Բուլյան ֆունկցիաների ներկայացումը նվազագույն բարդության բանաձևերով

Դիցուք տրված են բուլյան ֆունկցիաների F լրիվ համակարգը և փոփոխականների X բազմությունը: Այդ դեպքում ցանկացած f ֆունկցիա կունենա $[F]$ -ին պատկանելու նկարագրություններ: Դիցուք դրանցից մեկը է $f_1, \dots, f_k = f$ -ն է: Ֆունկցիաների այս հաջորդականության f_i ($1 < i \leq k$) անդամը կոչվում է n -չ էական, եթե այն ստացվում է f_j -ից՝ ($j < i$) վերջինիս որոշակի զույգ առ զույգ իրարից տարբեր փոփոխականների փոխարեն X -ից համապատասխանաբար զույգ առ զույգ տարբեր փոփոխականներով փոխարինելով: Օրինակ, $x_5 x_2 \vee x_4$ ֆունկցիան ստացվում է $x_1 x_2 \vee x_3$ ֆունկցիայից՝ x_1 և x_3 փոփոխականները համապատասխանաբար x_5 և x_4 փոփոխականներով փոխարինելով: Հաջորդականության մնացած անդամները կոչվում են էական: $f_1, \dots, f_k$ -ում էական անդամների թիվը կոչվում է՝ f -ը $[F]$ -ին պատկանելու տվյալ նկարագրության բարդություն: f ֆունկցիան F համակարգի նկատմամբ նվազագույն բարդության բանաձևով ներկայացում ասելով հասկացվում է այն բանաձևը, որն իրականացնում է այդ ֆունկցիան, և որն ունի $[F]$ -ին պատկանելու նկարագրության նվազագույն բարդություն: Եթե F լրիվ համակարգը վերջավոր է, ապա տվյալ ֆունկցիան իրականացնող նվազագույն բարդության բանաձև գտնելու խնդիրը միշտ լուծելի է: Իրոք, ընդունելով, որ F -ին պատկանող ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրն իրականացվում է միավոր բարդության բանաձևով (մնան ընդունելությունը իրատեսական է, քանի որ F -ին պատկանող ֆունկցիաները բազիսային են), մենք կկազմակերպենք բանաձևերի հաջորդական թվարկում՝ սկզբից F -ին պատկանող ֆունկցիաներն իրականացնող բանաձևերի, ապա՝ այդ բանաձևերի բոլոր հնարավոր զույգերի սուպերպոզիցիաների, այնուհետև՝ բոլոր հնարավոր եռյակների սուպերպոզիցիաների և այլն, մինչև որ առաջին անգամ կստացվի տվյալ ֆունկցիան իրականացնող բանաձև: Սակայն