

Հուլիս

Բովանդակություն

Նախաբան.....	4
ԳԼՈՒԽ 1. ԲՈՒԼՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ	5
1.1. Նախնական հասկացություններ: Տարրական բուլյան ֆունկցիաներ	5
1.2. Բանաձևերի համարժեքությունը: Տարրական ֆունկցիաների հատկությունները.....	9
1.3. Բուլյան ֆունկցիայի կատարյալ դիզյունկտիվ և կոնյունկտիվ նորմալ ձևերը	10
1.4. Ֆունկցիաների համակարգի փակումը: Լրիվություն	13
1.5. Ֆունկցիաների համակարգի լրիվության մասին թեորեմը	17
1.6. Բուլյան ֆունկցիաների նախալրիվ դասերը	25
1.7. Բուլյան ֆունկցիաների ներկայացումը նվազագույն բարդության բանաձևերով.....	26
1.8. Կրճատված ԴՆՁ-ի կառուցման մեթոդները	31
1.9. Շեմային ֆունկցիաներ.....	32
1.10. Բուլյան ֆունկցիայի արգումենտների ակտիվությունը	36
ԳԼՈՒԽ 2. ԹՎԱՅԻՆ ՍԻՆԵՄԱՆԵՐ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՆԿԱՐԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆԸ	
ALEX ԼԵԶՎՈՎ	45
2.1. Թվային սխեմայի գաղափարի ճշտումը.....	45
2.2. Սխեմայի նկարագրությունը Alex լեզվով.....	49
2.3. Շատ ելքեր ունեցող տրամաբանական սխեմաներ և նրանց նկարագրությունը Alex լեզվով	57
2.4. Տրամաբանական և հիշող տարրերից հավաքված սխեմաներ և նրանց նկարագրությունը Alex լեզվով	53
2.5. Շատ ելքեր ունեցող տրամաբանական սխեմայի ֆունկցիոնալ մոդելավորումը	61
2.6. Տրամաբանական և հիշող տարրերի վրա հավաքված սխեմաների ֆունկցիոնալ մոդելավորումը	64
Գրաչանություն	69

ԳԼՈՒԽ 1. ԲՈՒԼՅԱՆ ՖՈՒՆԿՏԻՎՆԵՐ

1.1. Նախնական հասկացություններ: Տարրական բուլյան ֆունկցիաներ

Դիտարկենք $E=\{0,1\}$ բազմությունը: $f(x_1, \dots, x_n)$ ֆունկցիան կոչվում է բուլյան ֆունկցիա, եթե նրա որոշման տիրույթը E^n -ն է, իսկ փոփոխման տիրույթը՝ E - ն: Ակնհայտ է, որ բուլյան ֆունկցիան կարող է ներկայացվել վերջավոր աղյուսակով (տես՝ աղյուսակ 1):

Աղյուսակ 1.

x_1	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$
0	...	0	0	$f(0, \dots, 0, 0)$
0	...	0	1	$f(0, \dots, 0, 1)$
0	...	1	0	$f(0, \dots, 1, 0)$
0	...	1	1	$f(0, \dots, 1, 1)$
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
1	...	1	1	$f(1, \dots, 1, 1)$

Նկատենք, որ բուլյան ֆունկցիան աղյուսակով ներկայացնելը թույլ չի տալիս տրված փոփոխականներից կախված ֆունկցիան ներկայացնել ավելի շատ թվով փոփոխականներից կախված ֆունկցիայի տեսքով: Նման հնարավորությունը անհրաժեշտ է տարբեր փոփոխականներից կախված ֆունկցիաները որոշակի իմաստով իրար հետ համեմատելու դեպքում: Այդպիսի հնարավորությունը ապահովելու նպատակով ներմուծենք հետևյալ սահմանումը:

Սահմանում 1.1: $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$

Ֆունկցիան x_i փոփոխականից կախված է էապես, եթե գոյություն ունի զրոներից ու մեկերից բաղկացած այնպիսի $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ կարգավորված հավաք, որ

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n),$$

հակառակ դեպքում կասենք, որ ֆունկցիան x_i -ից կախված է ոչ էապես:

Դիցուք $f(x_1, \dots, x_n)$ -ը x_i -ից ($1 \leq i \leq n$) կախված է ոչ էապես: $f(x_1, \dots, x_n)$ ֆունկցիայի աղյուսակից ջնջենք բոլոր $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ տեսքի հավաքների պարունակող տողերը, այնուհետև՝ x_i արգումենտը պարունակող սյունը: Ստացված աղյուսակով կորոշվի ինչ-որ $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ֆունկցիա: Մենք կհամարենք, որ $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ և $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ֆունկցիաները իրար հավասար են: Հեշտ է նկատել, որ հակառակ գործընթացի իրականացմամբ $g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ -ի աղյուսակից կարելի է ստանալ $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ -ի աղյուսակը: Այսպիսով, ոչ էական փոփոխականների ներմուծմամբ կարելի է ցանկացած երկու բուլյան ֆունկցիաներ բերել «ընդհանուր փոփոխականների»:

Նկատենք, որ զրոներից ու մեկերից բաղկացած բոլոր $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ կարգավորված հավաքների քանակը հավասար է 2^n -ի, որը, մասնավորաբար, հետևում է նրանից, որ յուրաքանչյուր նման հավաքի համապատասխանում է $0, 1, \dots, 2^n - 1$ թվերից մեկի՝ 2 -ական համակարգում n երկարության գրառմանը, և որ այդ համապատասխանությունը փոխադարձ միարժեք է: Այսպիսով, $x_1, \dots, x_n$ փոփոխականներից կախված բուլյան ֆունկցիան տրվում է 2^n երկարություն ունեցող սյունով: Քանի որ նման տարբեր սյուների համապատասխանում են տարբեր բուլյան ֆունկցիաներ, ուստի $x_1, \dots, x_n$

փոփոխականներից կախված բոլոր բուլյան ֆունկցիաների թիվը հավասար կլինի 2^{2^n} -ի:

Քանի որ արգումենտների թվի աճի հետ միասին ֆունկցիան իրականացնող աղյուսակը սրընթաց մեծանում է, խնդիր է առաջանում որոնել ֆունկցիան իրականացնող այլ եղանակներ: Նման եղանակներից է ֆունկցիան բանաձևերով ներկայացնելը: Այդ նպատակով նախապես ներմուծենք, այսպես կոչված, “տարրական” բուլյան ֆունկցիաներ: Բերենք այդ ֆունկցիաները աղյուսակներ 2 և 3-ում:

Աղյուսակ 2

x	0	1	x	$\bar{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Աղյուսակ 3

x_1	x_2	$(x_1 \& x_2)$	$(x_1 \vee x_2)$	$(x_1 \rightarrow x_2)$	$(x_1 \oplus x_2)$	(x_1 / x_2)	$(x_1 \downarrow x_2)$
0	0	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0	0

Աղյուսակներում ներկայացված ֆունկցիաները կարդացվում են այսպես.

0 - "0 հաստատուն",
 1 - "1 հաստատուն",
 x - "նույնական ֆունկցիա",
 $\bar{x}$ - " x -ի ժխտումը", " $\neg x$ ",

$(x_1 \& x_2)$ - " x_1 - ի և x_2 - ի կոնյունկցիան", " x_1 և x_2 ": & նշանի փոխարեն երբեմն գործածվում է "." նշանը կամ ընդհանրապես այն բաց է թողնվում: Այս ֆունկցիան անվանում են մաս տրամաբանական բազմապատկում:

$(x_1 \vee x_2)$ - " x_1 - ի և x_2 - դիզյունկցիան", " x_1 կամ x_2 ": Այս ֆունկցիան անվանում են մաս տրամաբանական գումարում:

$(x_1 \rightarrow x_2)$ - " x_1 - ի և x_2 - ի իմպլիկացիան", " x_1 - ից հետևում է x_2 - ը":

$(x_1 \oplus x_2)$ - " x_1 - ի և x_2 - ի գումարը ըստ մոդուլ 2 - ի":

(x_1 / x_2) - "Շեֆերի շտրիխը", "Շեֆերի ֆունկցիան":

$(x_1 \downarrow x_2)$ - "Պիրսի սլաքը", "Պիրսի ֆունկցիան":

Նշված տարրական ֆունկցիաների օգնությամբ սահմանվում է բանաձևի հասկացությունը:

Սահմանում 1.2: ա) Ինդուկցիայի բազիսը: Բոլոր տարրական ֆունկցիաները բանաձևեր են:

բ) Ինդուկցիոն քայլը: Եթե Φ_1 -ը և Φ_2 -ը բանաձևեր են, ապա $\overline{\Phi_1}$, $(\Phi_1 \& \Phi_2)$, $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$, $(\Phi_1 \rightarrow \Phi_2)$, $(\Phi_1 \oplus \Phi_2)$, (Φ_1 / Φ_2) , $(\Phi_1 \downarrow \Phi_2)$ արտահայտությունները նույնպես բանաձևեր են:

գ) Ուրիշ բանաձևեր, բացի ա և բ կետերում թվարկվածներից, չկան:

Բանաձևերին համապատասխանեցնենք ֆունկցիաներ հետևյալ կերպ.

Սահմանում 1.3: ա) Ինդուկցիայի բազիսը: $0, x, \bar{x}, (x_1 \& x_2), (x_1 \vee x_2), (x_1 \rightarrow x_2), (x_1 \oplus x_2), (x_1 / x_2), (x_1 \downarrow x_2)$ բանաձևերին համապատասխանեցնենք “այդ նույն” ֆունկցիաները:

բ) Ինդուկցիոն քայլը: Եթե Φ_1 և Φ_2 բանաձևերին համապատասխանեցվել են $f_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$ և $f_2 = f_2(x_1, \dots, x_n)$ ֆունկցիաները, ապա $\overline{\Phi_1}, (\Phi_1 \& \Phi_2), (\Phi_1 \vee \Phi_2), (\Phi_1 \rightarrow \Phi_2), (\Phi_1 \oplus \Phi_2), (\Phi_1 / \Phi_2), (\Phi_1 \downarrow \Phi_2)$ բանաձևերին համապատասխանաբար կհամապատասխանեցվեն $\bar{f}_1, (f_1 \& f_2), (f_1 \vee f_2), (f_1 \rightarrow f_2), (f_1 \oplus f_2), (f_1 / f_2), (f_1 \downarrow f_2)$ ֆունկցիաները:

Եթե Φ բանաձևին համապատասխանեցվել է f ֆունկցիան, ապա ասում են, որ Φ բանաձևը իրականացնում է f ֆունկցիան:

1.2. Բանաձևերի համարժեքությունը: Տարրական ֆունկցիաների հատկությունները

Ակնհայտ է, որ ցանկացած բանաձև իրականացնում է միակ ֆունկցիան, մինչդեռ միևնույն ֆունկցիան կարող է իրականացվել տարբեր բանաձևերով: Օրինակ, $(x_1 \& x_2)$ և $((x_1 \& x_2) \vee ((x_1 \& x_2) \& x_3))$ բանաձևերը իրականացնում են միևնույն ֆունկցիան:

Սահմանում 1.4: Φ_1 և Φ_2 բանաձևերը կոչվում են համարժեք, եթե նրանք իրականացնում են միևնույն ֆունկցիան: Նշված բանաձևերի համարժեքության փաստը գրառվում է այսպես. $\Phi_1 = \Phi_2$: $(x_1 \& x_2), (x_1 \vee x_2)$ և $(x_1 \oplus x_2)$ բանաձևերից ցանկացածը նշանակենք $(x_1 \circ x_2)$ – ով: Բերենք հեշտ ստուգվող նույնություններ (օ սիմվոլը միևնույն նույնությունում ամենուրեք ունի միևնույն իմաստը):

$$1. (x_1 \circ x_2) = (x_2 \circ x_1)$$

2. $((x_1 \circ x) \circ x_3) = (x_1 \circ (x_2 \circ x_3))$
3. $((x_1 \vee x_2) \& x_3) = ((x_1 \& x_3) \vee (x_2 \& x_3))$
 $((x_1 \& x_2) \vee x_3) = ((x_1 \vee x_3) \& (x_2 \vee x_3))$
4. $((x_1 \oplus x_2) \& x_3) = ((x_1 \& x_3) \oplus (x_2 \& x_3))$
5. $\overline{\overline{x}} = x, \quad \overline{(x_1 \& x_2)} = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}), \quad \overline{(x_1 \vee x_2)} = (\overline{x_1} \& \overline{x_2})$
6. $(x \& x) = x, \quad (x \vee \overline{x}) = x,$
 $(x \& \overline{x}) = 0, \quad (x \vee x) = 1,$
 $(x \& 0) = 0, \quad (x \vee 0) = x,$
 $(x \& 1) = x, \quad (x \vee 1) = 1:$

Բանաձևերի գրության պարզեցման նպատակով պայմանավորվենք, որ $\&$ գործողությունն ավելի "ուժեղ" է, քան $\vee$ - ն, այսինքն, եթե փակագծեր չկան, ապա սկզբում կատարվում է $\&$ գործողությունը, այնուհետև $\vee$ - ն: Օրինակ, $(x_1 \& x_2 \vee x_3)$ գրությունը նշանակում է $((x_1 \& x_2) \vee x_3)$: Այնուհետև, 2 նույնության պատճառով $((x_1 \circ x_2) \circ x_3)$ և $(x_1 \circ (x_2 \circ x_3))$ բանաձևերի փոխարեն կարելի է օգտվել $(x_1 \circ x_2 \circ x_3)$ գրառումից: Որոշ դեպքերում կարելի է նաև արտաքին փակագծերը բաց թողնել: Օրինակ, $(x_1 \vee x_2)$ -ի փոխարեն կարելի է գրել $x_1 \vee x_2$, $(x_1 \rightarrow x_2)$ - ի փոխարեն $x_1 \rightarrow x_2$ և այլն:

Նշենք նաև հետևյալ նույնությունները, որոնք հեշտությամբ հետևում են արդեն բերվածներից:

$$\begin{aligned} x_1 \vee x_1 \overline{x_2} &= x_1 \\ x_1 x_2 \vee \overline{x_1} x_2 &= x_2 \\ x_1 \vee \overline{x_1} x_2 &= x_1 \vee x_2 \\ (x \vee x_1)(x \vee x_2) &= x \vee x_1 x_2 \end{aligned}$$

1.3. Բուլյան ֆունկցիայի կատարյալ դիզյունկտիվ և կոնյունկտիվ նորմալ ձևերը

Կատարենք նշանակումներ.

$$x^1 = x, \quad x^0 = \overline{x}, \quad \bigvee_{i=1}^n x_i = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n, \quad \big\& x_i = x_1 x_2 \dots x_n:$$

Ակնհայտ է, որ $x^\sigma = 1$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $x = \sigma$:

Թեորեմ 1.1: Ցանկացած $f(x_1, \dots, x_n)$ բուլյան ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել բանաձևով հետևյալ տեսքով.

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \dots, \sigma_n),$$

որտեղ դիզյունկցիան վերցվում է 0 -ների ու 1 -երի ըստ բուլոր $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ հավաքների: Բուլյան ֆունկցիայի այս ներկայացումը կոչվում է կատարյալ դիզյունկտիվ նորմալ ձև (ԿԴՆԶ):

Ապացույց: Դիտարկենք կամայական $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ հավաքը և ցույց տանք, որ նրա համար վերոհիշյալ հավասարության ձախ և աջ մասերը ընդունում են միևնույն արժեքը: Ձախ մասում ստանում ենք $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, իսկ աջ մասում՝

$$\bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} \alpha_1^{\sigma_1} \dots \alpha_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \alpha_1^{\alpha_1} \dots \alpha_n^{\alpha_n} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

քանի որ ցանկացած այլ $\alpha_1^{\sigma_1} \dots \alpha_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ անդամ, որտեղ i – ի գոնե մեկ արժեքի համար $\alpha_i \neq \sigma_i$, հավասար է զրոյի:

Այս թեորեմից հետևում է, որ ցանկացած բուլյան ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել բանաձևով՝ ժխտման, կոնյունկցիայի և դիզյունկցիայի միջոցով: Օրինակ, աղյուսակ 4-ով տրված ֆունկցիայի ԿԴՆԶ – ն կգրվի այսպես՝

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$$

Աղյուսակ 4

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Ակներև է, որ ԿԴՆՁ – ուն կոնյունկցիաների թիվը հավասար է ֆունկցիայի աղյուսակում 1 - երի թվին: Այդ պատճառով աղյուսակում որքան մեծ է 1 - երի թիվը, այնքան բարդ է ԿԴՆՁ – ն:

Ստորև բերվում է ֆունկցիայի ներկայացման մի այլ եղանակ, ուր բանաձևի բարդությունը կապված է աղյուսակում 0 – ների թվի հետ:

Թեորեմ 1.2: Ցանկացած $f(x_1, \dots, x_n)$ բուլյան ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել բանաձևով հետևյալ բանաձևով.

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} (x_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n} \wedge f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)),$$

որտեղ կոնյունկցիան վերցվում է 0–ներից ու 1-երից բաղկացած ըստ բոլոր $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ հավաքների: Այս ներկայացումը կոչվում է ֆունկցիայի կատարյալ կոնյունկտիվ նորմալ ձև (ԿԿՆՁ):

Ապացույց: Դիտարկենք կամայական $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ հավաքը և ցույց տանք, որ նրա համար վերոհիշյալ հավասարության ձախ և աջ մասերը ընդունում են միևնույն արժեքը: Ձախ մասում ստանում ենք $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, իսկ աջ մասում՝

$$\&_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n)} (\alpha_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee \alpha_n^{\sigma_n} \vee f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \alpha_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee \alpha_n^{\sigma_n} \vee f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

քանի որ ցանկացած այլ $\alpha_1^{\sigma_1} \vee \dots \vee \alpha_n^{\sigma_n} \vee f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ անդամ , որտեղ i – ի գոնե մեկ արժեքի համար ($1 \leq i \leq n$) $\alpha_i \neq \sigma_i$ (և հետևաբար $\alpha_i^{\sigma_i} = \alpha_i^{\alpha_i} = 1$), հավասար է մեկի:

Կառուցենք աղյուսակ 4-ում բերված ֆունկցիայի ԿԿԼՁ – ն.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3):$$

Խնդիրներ: Կառուցել հետևյալ ֆունկցիաների ԿԿԼՁ – ն և ԿԿԼՁ – ն:

1. $(x_1 \vee x_2) \oplus \bar{x}_3$
2. $x_1^{x_2 \rightarrow x_3} \vee x_2$
3. $(x_1^{x_2} \vee x_1^{x_3} \vee x_2^{x_3})$
4. $(x_1 \downarrow x_2) \oplus (x_2 / x_3)$
5. $((x_1 \vee x_2 \rightarrow x_3) \downarrow \bar{x}_2)$
6. $(x_1 \rightarrow \bar{x}_2) \rightarrow (x_2 \rightarrow \bar{x}_3)$

1.4. Ֆունկցիաների համակարգի փակումը: Լրիվություն

Ըստ ինդուկցիայի սահմանենք բուլյան ֆունկցիաների $F = \{f_1, f_2, \dots, f_s, \dots\}$ համակարգի փակումը փոփոխականների

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$ հաշվելի բազմության նկատմամբ: Այդ փակումը նշանակենք $[F]$ – ու:

Սահմանում 1.5: ա) Ինդուկցիայի բազիսը: F –ին պատկանող ցանկացած ֆունկցիա պատկանում է նրա փակմանը, այսինքն՝ $F \subset [F]$:

բ) Ինդուկցիոն քայլը: Եթե $f(y_1, \dots, y_m), f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)$ ֆունկցիաները պատկանում են $[F]$ – ին, ապա $f(A_1, \dots, A_m)$ –ը նույնպես պատկանում է $[F]$ – ին, որտեղ A_i – ն $(1 \leq i \leq m)$ կամ $f_i(x_1, \dots, x_n)$ – ն է, կամ կամայական փոփոխական է X – ից:

գ) $[F]$ – ը ուրիշ ֆունկցիաներ, բացի ա) և բ) կետերում թվարկվածներից, չի պարունակում:

Դիտարկենք ֆունկցիաների $[F] = \{x_1x_2, x_1vx_2\}$ հանակարգը և փոփոխականների

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$ բազմությունը: Ցույց տանք, որ

$$x_1(x_2x_3vx_4) \in [F]:$$

Կառուցենք ֆունկցիաների հաջորդականություն, որը վերջանում է $x_1(x_2x_3vx_4)$ –ով, և որի ամեն մի անդամ կամ պատկանում է $[F]$ – ին, կամ ստացվում է հաջորդականության մեջ իրեն նախորդող ֆունկցիաներից՝ ինդուկցիոն քայլով: Այդ հաջորդականությունը կոչվում է $x_1(x_2x_3vx_4)$ –ը $[F]$ – ին պատկանելու ապացույց կամ նկարագրություն:

1. x_1x_2 բազիս,
2. x_2x_3 ինդուկցիոն քայլ 1,
3. x_1vx_2 բազիս,
4. $x_2x_3vx_4$ ինդուկցիոն քայլ 2, 3,

5. $x_1(x_2x_3vx_4)$ ինդուկցիոն քայլ 1, 4:

Նշենք փակման մի քանի ակնհայտ հատկություններ.

1. $[[F]] = [F]$
2. $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow [F_1] \subseteq [F_2]$
3. $[F_1 \cup F_2] \supseteq [F_1] \cup [F_2]$
4. $[F_1 \cap F_2] \subseteq [F_1] \cap [F_2]$

Սահմանում 1.6: Ֆունկցիաների F համակարգը փոփոխականների $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$ բազմության նկատմամբ կոչվում է փակ, եթե $[F] = F$:

Չետագայում բաց կթողնվի “փոփոխականների $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$ բազմության նկատմամբ” բառակապակցությունը, սակայն լռելայն կենթադրվի փոփոխականների որոշակի X բազմության առկայություն:

Սահմանում 1.7: Ֆունկցիաների F համակարգը կոչվում է լրիվ, եթե $[F] = P$, որտեղ P - ն բոլոր բուլյան ֆունկցիաների բազմությունն է:

Դիտարկենք կարևորագույն լրիվ համակարգեր.

1. P համակարգը լրիվ է:
2. $\{\bar{x}, x_1x_2, x_1vx_2\}$ համակարգը լրիվ է: Դա անմիջականորեն հետևում է նրանից, որ ցանկացած բուլյան ֆունկցիայի ԿԴՆՁ –ն բանաձև է՝ ներկայացված ժխտումով, կոնյունկցիայով և դիզյունկցիայով:
3. $\{\bar{x}, x_1x_2\}$ համակարգը լրիվ է: Սա հետևում է նախորդ կետում դիտարկված համակարգի լրիվությունից և հետևյալ փաստից.
 $x_1vx_2 = \overline{\bar{x}_1\bar{x}_2}$:
4. $\{\bar{x}, x_1vx_2\}$ համակարգը լրիվ է: Ապացույցը համանման է նախորդ ապացույցին: